

基于 MATLAB 的数学实验分层设计及效果研究

陶淑一

摘 要: 线性代数具有逻辑性强、抽象性强、前后知识联系密切、内容相互渗透的特点,在实际教学中,学生普遍反映这门课程难以理解,不好掌握,更难以做到举一反三,融会贯通。通过设计一些基于 MATLAB 的数学实验,给学生提供实际运用知识点的机会,提高学生的实际问题解决能力。此外,针对不同专业不同基础的学生,将数学实验进行分层设计,以满足不同层次学生的学习需求。问卷调查的结果发现,学生的学习积极性和兴趣普遍提高。期末成绩分析表明,学生对知识的掌握程度比以往更好。

关键词: 线性代数;数学实验;分层教学

1 引言

线性代数是大学最主要的数学公共基础课程之一,能培养学生的推理和问题解决能力。学好线性代数有利于学生提高抽象思维、逻辑推理和归纳判断的能力,科学计算和数学建模的能力,用数学语言描述问题和用数学方法解决问题的能力等。线性代数的教学内容主要包括行列式、矩阵、线性方程组、特征值、特征向量和二次型。线性代数具有逻辑性强、抽象性强、前后知识联系密切、内容相互渗透的特点,在实际教学中,学生普遍反映这门课程难以理解,不好掌握,更难做到举一反三,融会贯通。

在科学研究中,非线性模型经常用线性模型来逼近,线性代数被广泛应用于自然科学和社会科学中。线性代数的核心内容是线性方程组,主要工具是矩阵的初等变换。在传统线性代数教学中,涉及的行列式和矩阵的阶数较低。而在实际问题的数学模型中,行列式和矩阵的阶数很高,无法通过手工计算实现。如何将线性代数所学的与实际相结合,让学生有更好的学习和理解,并意识到线性代数这门课程的作用,是非常重要的。

矩阵试验室(matrix laboratory, MATLAB)是一款流行的计算软件。它具有强大的数值计算能力和图形可视化功能,美、英等教育发达国家非常重视 MATLAB 与线性代数课程的结合。2000 年美国麻省理工学院录制的线性代数公开课中,已经将 MATLAB 软件引入

作者简介: 陶淑一,女,上海杉达学院基础教育部讲师,硕士,主要研究方向为数值计算,计算机图形学,邮箱: taoshuyi1027!@163.com。

线性代数课程。此外, MATLAB 的指令和相应的数学函数相近, 容易入门。

所谓数学实验就是从问题出发, 借助计算机, 通过学习者亲自动手操作, 学习、探索和发现数学规律。1976 年, 美国伊利诺伊州大学(University of Illinois, USA)的两位年轻数学家利用计算机成功地解决了困扰数学界长达近两百年之久的四色定理(地图是可以四面着色的), 震惊了整个数学界, 并由此引发了数学家们的思考, 从而产生了“数学实验”这一新的数学研究方法^[1-2]。数学实验的目的就是通过使用计算机软件求解数学学习过程中所遇到的数学问题, 来提高利用计算机解决数学问题的能力。这也是当前数学教学改革的重要方面。

引入数学实验主要是为了提高学生学习数学的积极性, 促进数学与其他学科的结合。

此外, 同样是线性代数的教学, 由于学生的基础有很大不同, 有的学生已经牢固掌握了基本的知识点, 有的学生连最简单的知识点掌握起来都有困难。如何让不同基础的学生, 在学习过程中都有所收获, 这就需要在教学设计和进行数学实验时进行分层。

因此, 设计基于 MATLAB 实现的数学实验, 让学生对某个知识点有实际应用的机会, 提高学生解决实际问题的能力。同时, 针对不同专业不同基础的学生, 将数学实验的实现再次分层, 满足不同层次学生的学习需求。

2 分层教学

20 世纪初, 美国教育部门为了应对大量存在巨大文化差异的外来移民儿童, 提出了分层教学地点理念^[3-5], 即按照他们的文化素质对他们进行分层教学。到 20 世纪 60 年代, 著名教育家布卢姆提倡的“掌握学习理论”以及罗杰斯提倡的“人本主义”教育理论, 对分层教学的促进和分层教学方式方法的多样化都产生了重要影响。

分层教学是在教学实践中逐渐探索出来的一种新教学模式。即根据每个学生的特点, 实施有差别化的教学, 最终使每个学生的水平和素质都能得到提高。分层教学就是教师根据学生现有的知识、能力水平和潜力倾向把学生科学地分成各自水平相近的几组并区别对待, 这些群体在教师恰当的分层策略和相互作用中得到最好的发展和提高。又称分组教学、能力分组, 它是将学生按照智力测验分数或学业成绩水平分成不同水平的班组, 教师根据不同班组的实际水平进行教学。分层教学能够使学习成绩的评价更加合理, 可以提高学生的学习兴趣, 发挥学生的主观能动性, 激发学生学习潜能。

大学数学分层教学的目的是实现课程基本要求的前提下, 促进学生充分发展。为了达到这一目的, 把教学分成两个阶段: 第一阶段为基础阶段, 第二阶段为发展阶段。第一阶段的教学以实现大学数学课程基本要求为目的。第二阶段以促进学生充分发展为目的。针对不同班别的学生, 采用不同的教学内容、教学目标、教学要求和教学手段。

授课班级的学生比较多元化, 其中, 文科学生偏多, 其余计算机科学与技术、软件工程、机械电子工程、建筑电气智能化等工科专业的学生, 其数学学习能力也存在很大差别, 如何让基础参差不齐的学生都能够喜欢数学实验并能从中有所收获, 这是需要深入研究和思考

的问题。因此,分层要掌握一定的原则。如果分层具有严格的上下层级区别,有可能伤害较低层级学生的自尊心和自信心,挫伤他们的学习积极性,使他们产生自暴自弃的心理。所以,本文考虑将数学实验融于某个实际问题,并将该问题设计两个小问题,学有余力的同学可以全部完成,达成数学分层教学的较高目标。其他同学只需完成第一问,完成课程考核的基本要求,这样就可以起到真正的分层学习效果。

3 数学实验

数学实验方法^[6](mathematical experiment methods, MEM)是指借助于某种客观工具(特别是计算机或数学软件),针对某种数学猜想或假说、某种客观现实中待解决的问题、某个数学应用的分支或相关问题,应用数学理论来进行处理和解决的一种方法。从这个意义上讲,数学实验方法既是数学研究与发现的重要方法,也是数学教育、数学学习和数学应用的重要方法。

3.1 数学理论传授型数学实验的定义

数学理论传授型数学实验是指以计算机及数学软件为工具,以传统的大学数学基本理论和方法为实验内容,利用数学软件来计算、证明各种数学问题。这种利用数学实验进行辅助教学的手段,有助于增强教学过程的生动性、直观性及可操作性,并有助于学生对传统数学教学内容的理解和掌握。数学实验的目的是加深对基本概念和基本理论的理解,进一步掌握数学计算、论证的方法,帮助学生提高数学学习的兴趣,拓宽解决问题的思路与方法。知识传授型数学实验课的教学内容是传统数学教学的补充和发展。

3.2 数学理论传授型数学实验的意义

数学理论传授型数学实验的意义在于能够激发学生的学习兴趣,加深对所学基本理论知识的理解,进一步巩固所学的基本计算与分析方法,同时能够培养学生的数学软件使用能力。按照原有的教学方法和内容,我们教给学生的主要是基本的理论与方法,能够解决一些计算问题、证明问题等,但由于计算量的问题,往往只能解决一些较为简单、特殊的问题,对于复杂的、规模较大的问题,由于涉及复杂的运算过程,学生很难通过手工做出来。借助数学软件的强大运算能力,能够完成更多更一般、更复杂、规模更大的问题。有了数学实验的帮助,学生可以借助计算机来解决不少数学问题,学会使用相关软件来进行数学计算和分析,有助于激发学生的学习积极性,增强学生的学习自信。

3.3 教学内容的选择原则

数学实验教学的目的是使学生掌握一种数学方法,因此在教学内容的选择上既要遵循灵活性原则,同时也要遵循典型性和规范性原则。灵活性,即教学案例可以灵活选择,只要能够为学生所接受、能够体现实验教学的特定目的、客观条件允许,就可以选为教学内容;典

型性,即必须选择最具典型性的教学案例,既生动有趣,又能耳目一新,真正体现现代计算机工具的优势。规范性,即要与数学教学基本要求紧密结合,体现相关课程教学重点和难点,要与相应学科专业人才培养相结合,所选教学案例最好是与该专业领域密切相关的题材。

4 分层数学实验教学设计

根据大学数学分层教学的目的和数学理论传授型数学实验的教学内容选择原则,将本课程的知识点和实际问题相结合,设计了大量实际数学实验问题,基于 MATLAB 得以实现。考虑到学生的数学学习能力不同,对 MATLAB 的自我学习能力和学习兴趣不同,针对每个数学实验问题,都设计了理论层面和实际问题解决两个小问题。对于基础较薄弱的学生,只需完成第一个小问题,对于学有余力的学生,鼓励其完成数学实验中的两个小问题。对于学生的完成情况,给予不同的平时分激励,激发学生学习动力。

以下是具体问题的分层数学实验设计样例:

1) 方程组的应用——交通流量问题

在某市的南京路、北京路、四川路、河南路交界处的车辆数如图 1 所示:

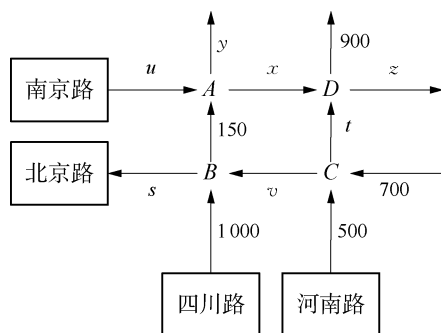


图 1 车辆数流量

问题 1: 写出需要满足的线性方程组,利用 MATLAB 将增广矩阵化为行最简阶梯形矩阵。

问题 2: (选做)利用 MATLAB,求出满足问题的所有解。

像这样一个有实际背景的例子,可以让所有学生完成第 1 个问题,这样就具备了初步的解决问题能力。学有余力的学生,可以进一步完成第 2 个问题。在这里我们可以介绍一下 $\text{rref}(A)$ 这个函数,它是用来求矩阵最简形的。

该问题的关键点在于要满足每个路口的车辆流入等于车辆流出,即

$$\begin{cases} x + y = u + 1500 \\ x + t = 900 + z \\ v + 1000 = s + 1500 \\ v + t = 500 + 700 \end{cases}$$

MATLAB 命令为

```
A=[1,1,0,-1,0,0,0,1500;1,0,-1,0,0,0,1,900;0,0,0,0,1,-1,0,1500;0,0,0,0,1,0,1,1200];
```

```
rref(A)
```

```
ans=
```

```
Columns 1 through 6
```

```

1      0      -1      0      0      0
0      1       1     -1      0      0
0      0       0      0      1      0
0      0       0      0      0      1
```

```
Columns 7 through 8
```

```

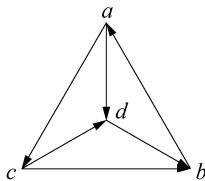
1      900
-1     600
1     1200
1      700
```

2) 矩阵及乘法的应用——比赛排名

四支篮球队进行单循环赛,结果如图(无平局),其中弧 (a,b) 表示 a 击败 b 。

问题 1: 写出对应的邻接矩阵。

问题 2: 排序规则,若 a 打败 b ,则 a 从 b 身上得到 1 分;若 a 打败 c 且 c 打败 b ,则 a 从 b 身上也得到 1 分。按此规则,利用矩阵乘法及 MATLAB,为此四支队排名。



第 1 小题是将实际问题转化为矩阵,要求所有学生掌握。第 2 小题,涉及了矩阵乘法的应用,让学有余力的同学完成。

若 a 打败 b ,则记 a_{ij} 为 1,否则记为 0,则该问题的邻接矩阵为 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 。根

据排序规则,若 a 打败 c 且 c 打败 b ,则 a 从 b 身上也得到 1 分,即 $a_{ik}=1, a_{kj}=1$,则 $a_{ij}=1$ 。可以利用 $a_{ij}=a_{ik} \times a_{kj}=1$ 来计算,这就可以转化为矩阵的乘法运算,即计算 $\mathbf{A}^2$ 。总得分即计算 $\mathbf{A} + \mathbf{A}^2$ 。

MATLAB 命令为

```
A= [0,0,1,1;1,0,0,0;0,1,0,1;0,1,0,0];
```

```
X= A+ A* A
```

```
X=
```

```
0    2    1    2
1    0    1    1
1    2    0    1
1    1    0    0
```

由此可知, $a_{12}=2$, 即 a 队在 b 队身上得到 2 分, 即每一行的和为每个队伍的总得分。 a 队得到 5 分, b 队得到 3 分, c 队得到 4 分, d 队得到 2 分, 所以四个队的排名为 a, c, b, d 。

3) 逆矩阵的应用——传输密码

某接受者收到的信息为 $C = \begin{bmatrix} 43 & 17 & 48 & 25 \\ 105 & 47 & 115 & 50 \\ 81 & 34 & 82 & 50 \end{bmatrix}$, 公司的加密矩阵为 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$,

字母	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z	空格
码字	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	0

问题 1: 求矩阵 A 的逆矩阵。

问题 2: 根据对应表, 利用 MATLAB, 破译此信息。

设包含真实信息的矩阵为 B , 则 $AB=C$, 即 $B=A^{-1}C$ 。

MATLAB 命令为

```
A= [1,2,1;2,5,3;2,3,2];
```

```
C= [43,17,48,25;105,47,115,50;81,34,82,50];
```

```
B= inv(A) * C
```

```
B=
```

```
19    4    15    25
5     0    14     0
14   13     5     0
```

根据对照表, 可以得出结果为: send money

上述三个线性代数实例都有很强的实际应用背景, 与相应的理论知识点密切结合, 在数学软件 MATLAB 的帮助下, 问题变得简单易懂而且有趣。在课堂中引入数学实验后, 在一个 60 人的实验班中, 80% 的学生都能完成两个小问题。期末发放调查问卷发现, 大家普遍

认为学习的积极性和学习兴趣有所提高。从期末成绩看,实验班学生对课程内容的掌握程度比以往未涉及数学实验的教学班更好,班级平均成绩提高了 4.5 分。

5 讨论

通过以上实例,可以发现引入数学实验,学生不再只是被动地接受知识,而是主动将所学理论知识用于解决实际问题。在学习过程中,会对这门课程的作用和意义有更深刻的理解,理论的运用会更娴熟。可见,在线性代数课程中融入数学实验有以下几点好处:

1) 学生能更为深刻地理解数学原理

学生由过去的被动接受转为主动参与,由原来只做书本上的习题变为去设计问题,解决问题。教师授课内容的深度也增加了很多,原来在讲某些知识点时只能涉及浅表层面,比如行列式,原来只能讲到二阶、三阶的程度,现在利用计算机可以解决包含高阶行列式的问题;在讲分块矩阵时亦是如此,原来只能在理论上告诉学生它在计算上的好处,现在可以找到一个高阶矩阵,让学生自己设计分块,感受计算上的差别。这大大加深了学生对一些复杂、抽象概念的系统认识,同时感受数学课程的魅力所在。

2) 培养了学生使用数学软件的习惯

学生在平时的学习生活中,对于有些数学软件如 MATLAB,基本没有接触过。通过数学实验,可以让学生有机会学习和熟悉一些数学软件。21 世纪是信息时代,数学学科和计算机的结合,有助于改变学生认为数学课计算量大、枯燥无味的刻板印象,大大提高学生对数学课程的兴趣。

3) 提高学生利用数学软件解决大型线性计算问题的能力

鉴于计算能力的限制和课堂教学时间的限制,很多教师在课堂上都无法展开大型计算,借助计算软件开展数学实验大大改变了这一现状,有助于学生在课堂之外,深刻体验大型计算解决问题的乐趣,体验数学与实际生活的联系。

4) 有助于学生掌握数学建模的思想和方法

数学建模^[7-8],顾名思义,需要对实际问题先建立起基本的数学模型,然后利用相应的数学方法进行解析或近似处理,计算机的发展,让数学模型的求解变得轻而易举。数学建模的思想融入高数课的困难之一是数学建模往往与高深的数学理论和方法紧密相连,很多学生感到学习非常困难。虽然一些数学建模方面的竞赛经常开展,但很多同学对此并不是很了解,参加的积极性也不高。在线性代数课程中引入数学实验,可以看作是学习数学建模前的小练兵,选用体现数学建模思想的初级数学理论与方法构建数学实验,结合生活实际问题,既能激发学生学习数学的兴趣,又能培养学生的建模思维。发掘更多喜欢数学建模的学生,点燃更多学生学习数学的热情,促进学校数学建模竞赛的开展。

5) 数学实验也是一种考核学生的手段

鉴于课时有限,线性代数课没有期中考试,而占了 40% 的平时成绩,只靠作业去衡量,难

以体现出区分度,数学实验是一种有效的补充。让学有余力的学生有更多收获的同时,加强学生的动手实践能力,体现出对学生评价的区分度,这对所有学生有激励作用。

6 结语与展望

本文根据大学数学分层教学的需要和数学理论传授型数学实验的教学内容选择原则,设计了很多结合日常应用的数学实验,每个数学实验都根据学生的水平精心设计了两个不同层次的小问题,允许不同基础的学生自主选择完成。数学实验借助的软件 MATLAB 不仅学起来比较容易,功能还非常强大。一个学期的线性代数学下来,不仅让学生掌握了数学的理论方法、培养了学生的建模思维,学会了 MATLAB 软件的应用,激发了学生的数学兴趣,最关键的是让不同基础的学生都能在课程中获得成长和进步,可以说是一举多得。

数学实验融入教学和分层教学的思想,只在部分班级中进行了尝试,一切都还在起步阶段,还需要多轮教学经验的积累,需要进一步的改进和迭代。如何设计更多合适学生操作的数学实验,并将数学实验运用于实际教学中,或者让学生尝试根据所学知识点,设计相应的数学实验,这是未来努力的方向。

参考文献

- [1] 王军霞,黄娟.将数学实验融入线性代数的教学[J].数学教学研究,2011(2):48-51.
- [2] 李尚志.培养学生创新素质的探索——从数学建模到数学实验[J].大学数学,2003(1):46-50.
- [3] 陈之辉.关于大学数学课程分层教学实施方式的思考[J].河北软件职业技术学院学报,2017(4):41-43.
- [4] 孙聪,王千.分层教学法在课程教学中的价值研究[J].现代交际,2015(11):218-219.
- [5] 凌春英.基于分层教学法的高等数学课程教学改革研究[J].黑龙江科学,2018(12):48-49.
- [6] 胡京爽.数学实验方法与大学数学实验课程教学[J].洛阳大学学报,2006(2):105-109.
- [7] 阎家斌,宋叔尼,孙艳蕊.用 MATLAB 和建模实践改造工科线性代数课程的体会[J].大学教育,2013(8):65-66.
- [8] 叶其孝.把数学建模、数学实验的思想和方法融入高等数学课的教学中去[J].工程数学学报,2003(8):3-13.

Stratified Mathematics Experiment Design Based on MATLAB

Tao Shuyi

Abstract: Linear algebra has the characteristics of strong logic, abstraction, close connection of knowledge and infiltration of content. In practical teaching, students generally reflect that this course is difficult to understand, difficult to master, let alone to draw a conclusion from one another and integrate. This paper proposes to design some mathematical experiments based on MATLAB, so that students can have practical

application opportunities for a certain knowledge and improve the students' abilities to solve practical problems. At the same time, for students of different majors and different foundations, the realization of mathematical experiments is stratified to meet the learning needs of students at different levels. After the introduction of mathematics experiment in the classroom, it is found that students' general learning enthusiasm and interest have improved. Judging from the final grade, students' mastery of this course is also better than before.

Key words: linear algebra; Mathematical experiment; Stratified teaching